中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末模拟试卷

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, -x) = \varphi(x) \\ u(x, x) = \psi(x) \end{cases}$$

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0(0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) - hu_x(0,t) = u_1, u(l,t) + hu_x(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 \Delta u (0 < x, y, z < 1, t > 0) \\
u(x, y, z; 0) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\
u_t(x, y, z; 0) = 0 \\
u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 \\
u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 \\
u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0
\end{cases}
$$

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u(t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=(1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t (0 < x < l, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2.Legendre 方程: $\left[(1-x^2)\,y'\right]'+\lambda y=0; n$ 阶 Legendre 多项式
$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$
Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1;$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$

3. ν 阶 Bessel 方程 : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0; \nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$; Bessel 函数的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方: $N_{\nu1n}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right),\quad N_{\nu2n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right),\quad N_{\nu3n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)$

4. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x; \mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$
$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is; L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$
$L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1}, L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}, L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3u=\delta(M)$ 的基本解:
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7. 设 $G\left(M;M_0\right)$ 是三维 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3u=-f(M),(M=(x,y,z)\in V)\\ u|s=\varphi(M)\end{cases}$$

对应的格林函数, 则
$u\left(M_0\right)=-\iint_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}\left(M;M_0\right)dS+\iiint_V f(M)G\left(M;M_0\right)dM\cdot\left(\text{其中}M_0=(\xi,\eta,\zeta)\right)$

8. 积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\omega}$$